

VARIETÀ DI BANDIERA e loro FIBRATI COTANGENTI

$T \xrightarrow{\text{for. alg.}} X$
 $\uparrow$
 varietà quasi-proiettiva / $\mathbb{C}$
 liscia

3^a parte corso: $X = T^* \mathcal{F}$
 $\uparrow$
 varietà di bandiera

Varietà di bandiera

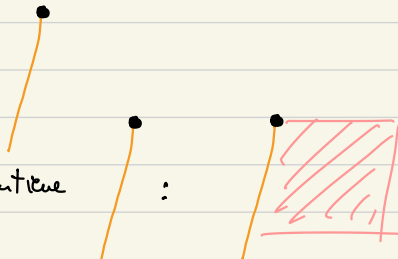
Sia $n \geq 2$

$$\mathcal{F}_n := \{ \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n \mid V_i \in \text{Gr}_i(\mathbb{C}^n) \}$$

"varietà delle bandiere (complete)".

$\hookrightarrow \subseteq \prod_{i=1}^{n-1} \text{Gr}_i(\mathbb{C}^n)$ e condizioni di contenimento
 sono chiuse $\Rightarrow$ var. proiettiva

Non è dovuto al seguente fatto:

- $\{0\}$
 - $V_1 =$ retta per $\bullet$:
 - $V_2 =$ piano che contiene $\bullet$:
- 

Vogliamo ora generalizzare questa varietà e al tempo stesso mostrare che è uno spazio omogeneo (= spazio su cui un gruppo algebrico agisce transitivamente)

Fissiamo $(e_1, \dots, e_n) \underset{\text{base}}{\subseteq} \mathbb{C}^n$

(non unica!!!)

Allora ogni $V_\bullet \in \mathbb{F}^n$ può essere rappresentato tramite una matrice invertibile $n \times n$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbb{C} v_1 \\ V_2 &= \langle v_1, v_2 \rangle \\ &\vdots \\ V_i &= \langle v_1, \dots, v_i \rangle \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_{i-1} & v_i \\ | & | & & | & | \end{bmatrix}}_{M_{V_\bullet}} \quad \text{dove } v_i \text{ è scelto in modo tale che } \det(M_{V_\bullet}) = 1$$

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ki} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} \text{ se } v_i = \sum v_{ki} e_k$$

Esempio: $\mathbb{C}^3 \supset \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad V_\bullet = \{0\} \subset \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \subset \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^3 \in \mathbb{F}_3$

$$\rightsquigarrow M_{V_\bullet} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \circ \dots$$

Otteniamo in questo modo un'azione di SL_n su $\mathbb{F}^n$:

$$g_\eta \cdot V_\bullet = g_\eta \cdot M_{V_\bullet} \quad (\text{oss: ben definita poiché non dipende dalla matrice rappresentante})$$

$\uparrow$
mat. righe per colonne

A questo punto, data una matrice invertibile $\begin{bmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{bmatrix} \rightsquigarrow V_M.$

Definiamo $E. \in \mathcal{F}_n$ come la bandiera data da

$$E_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle (= \text{span}_{\mathbb{C}} \{e_1, \dots, e_i\})$$

"BANDIERA STANDARD"

In questo caso $M_{E.} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Usiamo cos' per mostrare $\mathcal{F}_n \simeq SL_n \cdot E.$

Vogliamo cos' far vedere che $\forall V. \in \mathcal{F}_n \exists g \in SL_n$ t.c. $gE. = V.$

Ma questo è immediato: se $g = M_{V.}$ allora $M_{V.}E. = V.$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_n \text{ è uno spazio omogeneo } \simeq SL_n / \text{Stab}_{SL_n}(E.)$$

Analizziamo dunque a calcolare: $\text{Stab}_{SL_n}(E.)$:

$$\text{Stab}_{SL_n}(E.) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \in SL_n \right\} =: B$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_n \simeq SL_n / \boxed{B}$$

← sottogruppo di BOREL = sgr chiuso, risolubile
connesso
e massimale con
tali proprietà

$\leadsto G$ gruppo algebrico (lineare) riduttivo

B sgr. di Borel

il suo sgr. ha un idempotente canonico e normale e base

$\leadsto$ esiste il quoziente categorico $G/B \simeq G[V] \hookrightarrow P(V)$

Defn G/B è detta varietà di bandiera

Esempio Sia $G = Sp_{2n} = \{g \in SL_{2n} \mid (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w) \ \forall v, w \in \mathbb{C}^{2n}\}$

$\mathbb{C}^{2n}$ con forma symplettica (wrt basis) indotta da $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} =: \Omega$
 $(e_1, \dots, e_{2n})$ base $(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & \\ & \end{pmatrix}_v, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \\ & \\ & \end{pmatrix}_w \mapsto v^t \Omega w$

$$(g \cdot v, g \cdot w) = (v, w)$$

$$\Leftrightarrow v^t g^t \Omega g w = v^t g^t \Omega g w$$

$$\Leftrightarrow g^t \Omega g = \Omega \Leftrightarrow g = \Omega^{-1} (g^t)^{-1} \Omega$$

Portanto possiamo vedere Sp_{2n} come i punti fissi di un' involuzione;

$$\begin{array}{ccc} \tau: SL_{2n} & \longrightarrow & SL_{2n} \\ g & \longmapsto & \Omega^{-1} (g^t)^{-1} \Omega \end{array} \quad \leadsto Sp_{2n} = SL_{2n}^\tau$$

Osserviamo che rispetto a questa involuzione $B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix} \right\} \in SL_{2n}$ è stabile:

$$g = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\Omega(g^t)^{-1}}_{\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}} \Omega = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix} \in B$$

Fatto: B^i (=punti fissi) è a sua volta un Borel

D'altronde possiamo definire un automorfismo induttivo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_{2n} & \longrightarrow & \mathbb{H}_{2n} \\ V_i & \longmapsto & W_i \quad \text{con} \quad W_i = V_{n-i}^\perp \quad \perp \text{ w.r.t form} \end{array}$$

Esempio $\tau(E.) = \underbrace{\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle^\perp}_{\langle e_1 \rangle} \cap \underbrace{\langle e_1, \dots, e_{n-2} \rangle^\perp}_{\langle e_1, e_2 \rangle} \cap \dots \cap \underbrace{\langle e_1 \rangle^\perp}_{\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle}$

$= E. \quad \text{è un pto fisso!}$

Lakshmi Bai 1987: $Sp_{2n}/\tilde{B} = (SL_{2n})^2/B^2 \simeq \mathbb{H}_{2n}^2$
 = varietà delle
 hermitiane isotrope

Esempio 2 $SO(2n+1)$ si procede nello stesso modo con $\Omega = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$
 (Lakshmi Bai)

Esempio 3 (Lakshmi Bai + Repsner)

Rmk Altre possibili generalizzazioni di $\mathcal{F}_n$: varietà delle bandiere parziali

$$\mathcal{F}_{(i_1, \dots, i_r; n)} = \left\{ \{0\} \subset V_{i_1} \subset \dots \subset V_{i_r} \subset \mathbb{C}^n \mid V_{i_j} \in \text{Gr}_{i_j}(\mathbb{C}^n) \right\}$$

$$\cup_{(i_j - i_{j-1})} E. \quad (\text{bandiera parziale std})$$

$$\leadsto \mathcal{F}_{(i_1, \dots, i_r; n)} \simeq SL_n^{(i_1, \dots, i_r)} E.$$

$$\text{Stab}_{SL_n}(E.) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \text{diag}(1, \dots, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{i_j - i_{j-1}}) & * \\ \hline 0 & \text{diag}(1, \dots, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{i_{j+1} - i_j - 1}) \end{array} \right) \right\} =: \boxed{P_i}$$

$$(i_j - i_{j-1}) \times (i_{j+1} - i_j - 1)$$

↑ sgr PARABOLICO
(= sgr chiuso contenente un Borel)

(= sgr t.c. G/P proiettiva)

Esempio $\mathcal{F}_{(1; n)} \simeq \mathbb{P}^1$

$$\mathcal{F}_{(i_1; n)} \simeq \text{Gr}_{i_1}(\mathbb{C}^n)$$

Generalizzazione: G/P = var. di bandiere parziali

Caso simmetrico/ortogonale: Tutti i paraboli di G^2 si trovano come pti fissi di paraboli (opportuni) di SL_n
 $\leadsto$ si considerano poi bandiere (parziali) isotropiche

Azioni di tori

Torniamo al caso SL_n e denotiamo $A := \left\{ \begin{pmatrix} z_n & & \\ & \mathbb{O} & \\ & & z_n \end{pmatrix} \right\} \subset SL_n$

$$A \curvearrowright \mathcal{G}_n$$

È facile convincersi che $\mathcal{G}_n^A = \{ \text{bandiere coordinate} \}$
 $= \{ E_\bullet \mid \sigma \in \underbrace{\mathcal{G}_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{gr. simmetrico}}} \}$

$E_\bullet$ bandiere date da $E_i^\sigma = \langle e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(i)} \rangle$

non abbiamo descrizione concreta del luogo dei punti fissi:
vediamo inoltre che essi sono $n!$, cioè finiti (e isolati)

Questa descrizione esplicita si generalizza:

$G \supset A$ toro algebrico massimale

($\Rightarrow$ Spz commutativo chiuso i cui elementi sono semisemplici)

A agisce su G/B e $(G/B)^A \longleftrightarrow W = N_G(A)/T$
gruppo di WEYL

Perché questo generalizza? $N_{SL_n}(A) = \left\{ \text{matrici monomiali di det } 1 \right\}$
 $= \left\{ \begin{array}{l} \text{matrici in } SL_n \text{ aventi esattamente} \\ \text{un coeff. } \neq 0 \text{ in ogni riga e} \\ \text{ogni colonna} \end{array} \right\}$

Ma A risale le colonne

$$\Rightarrow N_{SL_n}(A) / T \leftrightarrow \{ \text{matrici di permutazione} \} \leftrightarrow \mathfrak{S}_n$$

Pu- $Sp_{2n} : \sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \text{ t.c. } \sigma(m) = 2n+1 - \sigma(2n+1-m)$

$SO_{2n+1} : \sigma \in \mathfrak{S}_{2n+1} \text{ t.c. } \sigma(m) = 2n+1 - \sigma(2n+2-m)$

$SO_{2n} : \sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \text{ t.c. } \sigma(m) = 2n+1 - \sigma(2n+1-m)$
 $\wedge \# \{ m \mid \sigma(m) > n \} \equiv 0 \pmod{2}$

Azioni di $\mathbb{C}^\times$ e cellularizzazione per G/B

Torniamo al nostro caso preferito: $\mathbb{F}_n$

Consideriamo il cocarattere $\chi: \mathbb{C}^\times \rightarrow A = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$
$$z \mapsto \begin{pmatrix} z^{n-1} & 0 \\ z^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & z^{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix}$$

Traente χ otteniamo un'azione indotta di $\mathbb{C}^\times$:

$$z \cdot V_\bullet := \chi(z) \cdot V_\bullet$$

È facile vedere che, nuovamente, $\mathbb{F}_n^{\mathbb{C}^\times} = \{ E_\bullet^\sigma \mid \sigma \in G_n \}$

ovvero, χ è un cocarattere generico

Andremo a vedere che i becni attrattivi:

$$\text{Att}_\sigma = \{ V_\bullet \in \mathbb{F}_n \mid \lim_{z \rightarrow 0} \chi(z) \cdot V_\bullet \}$$

sono spazi affini (omogenei per l'azione di B)

la cui dimensione (su $\mathbb{C}$) è data da $\# \text{Inv } \sigma = \{ (i, j) \mid \begin{matrix} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{matrix} \}$