Decomposizione di Bruhat

Iniziamo con un enunciato che deriva da quanto imparato nel primo corso di Alg lineare: l'eliminazione di Gauß:

$$GL_n = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} B \dot{\sigma} B \quad , \text{ dove } \quad B = \{ (\nabla) \}$$

$\dot{\sigma}$ = matrice di permutazione t.c. $\dot{\sigma}_{ij} = \begin{cases} 1 & i = \sigma(j) \\ 0 & \text{otw} \end{cases}$

Procediamo in due passi:

<u>passo 1</u> Eseguiamo eliminazione di Gauß sulle colonne senza però scambiarle (possiamo solo riscalarle per un numero $\neq 0$ o sommare ad una colonna multipli di colonne minori).

Osserviamo che ciascun passo elementare di questa procedura corrisponde a moltiplicare a dx per una matrice della forma

$$\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots \quad * & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} i,j \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & * & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ma queste matrici generano $B \Rightarrow$ eliminazione di Gauß su colonne equivale a moltiplicare per un elto in B.

Notiamo dunque che $\forall (a_{ij}) \in GL_n$

$$\exists! \text{ matrice } \begin{pmatrix} * & * & & \\ * & \boxed{1} & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & & \\ \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \in (a_{ij}) B$$

Notiamo inoltre che gli $\boxed{1}$ pivotali corrispondono ad una permutazione, che denotiamo $\mathrm{Perm}((a_{ij}))$.

<u>passo 2</u> Prendendo trasposti vediamo che tramite moltiplicaz. per B a sinistra possiamo eseguire una eliminazione di Gauß sulle righe (senza scambi) così da ottenere una matrice di permutazione, che è proprio $\dot{\mathrm{Perm}}((a_{ij}))$.

$\rightsquigarrow \forall g \in GL_n \quad \exists!\, b, b' \in B,\ \sigma \in S_n$ t.c.

$$g = b' \dot{\sigma} b$$

Ne segue che $GL_n = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} B \dot{\sigma} B$ "DECOMPOSIZIONE di BRUHAT"

Intersecando con SL_n, otteniamo analoga scomposizione

$$SL_n = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} B \dot{\sigma} B$$ "DECOMPOSIZIONE di BRUHAT"

(dove stavolta $B \subset SL_n$ e $\dot{\sigma} \in SL_n$)

$$\rightsquigarrow \mathcal{F}l_n \simeq SL_n/B = \bigsqcup_{\sigma\in S_n} \boxed{B\dot\sigma B/B}$$

$\hookrightarrow$ CELLA di SCHUBERT

Prima di dimostrare che i bacini attrattivi dell'azione di $\mathbb{C}^\times$ indotta dal carattere χ della volta scorsa sono proprio queste celle, andiamo a vedere che ciascuna è uno spazio affine di dimensione $=\#\mathrm{Inv}(\sigma) = \{(i,j) \mid i<j \wedge \sigma(i)>\sigma(j)\}$

$$\dim\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \\ \vdots & \vdots & & * & \\ * & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \cdots & * & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \boxed{1} & 0\ 0\ 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \ddots \end{pmatrix}}_{(a_{ij})} B \right\} = \#\left\{(i,j) \;\middle|\; a_{ij}\neq 0,1\right\}$$

$$= \#\left\{(i,j) \;\middle|\; \begin{matrix} \underbrace{i}_{\sigma(k)} < \sigma(j) \\ j < \underbrace{\sigma^{-1}(i)}_{\overset{!!}{k}} \end{matrix}\right\} = \#\left\{(k,j) \;\middle|\; \begin{matrix} j<k \\ \sigma(k)<\sigma(j)\end{matrix}\right\} = \#\mathrm{Inv}(\sigma)$$

$$\Rightarrow B\dot\sigma B/B \simeq \mathbb{A}^{\#\mathrm{Inv}(\sigma)}$$

D'altronde, $\#\mathrm{Inv}(\sigma) = \min\{r \mid \sigma = s_{i_1}\dots s_{i_r}\} =: \ell(\sigma)$

dove $s_j = (j, j+1)$ "LUNGHEZZA"

In generale, il gruppo di Weyl di un gruppo algebrico lineare G è un gruppo di Coxeter. Ammette cioè un sistema di generatori S di ordine 2 ($=\{(1,2),(2,3),\dots,(n-1,n)\}$ per S_n) e si può definire

$$\ell : W \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$
$$w \longmapsto \min\{r \mid w = s_1\dots s_r,\ s_i\in S\}$$

Allora, se $G \supset \underset{\text{Borel}}{B}$: $G/B = \bigsqcup_{w \in W} \boxed{\underbrace{B\dot{w}B/B}_{\simeq\, \mathbb{A}^{\ell(w)}}}$ ← "CELLA di SCHUBERT"

Ricordiamo che il cocarattere prescelto era

$$\chi : z \longmapsto \begin{pmatrix} z^{n-1} & & & \\ & z^{n-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{-\frac{n(n-1)}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} z^{n} & & & \\ & z^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^2 \\ & & & & z \end{pmatrix}$$

$$(SL_n) \qquad\qquad\qquad (GL_n)$$

Vogliamo dunque determinare

$$\mathrm{Attr}\left(\dot{\sigma}B/B\right) = \left\{ gB/B \;\middle|\; \lim_{z \mapsto 0} \chi(z).gB/B = \dot{\sigma}B/B \right\}$$

e.g. $G = SL_2$, $\mathcal{F}l_2 \simeq \mathbb{P}^1$ $\quad \chi : \mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} A$

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

In questo caso $(\mathbb{P}^1)^A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Attr}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1 \;\middle|\; \lim_{z \mapsto 0} \begin{bmatrix} za \\ z^{-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \Rightarrow a \neq 0$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1 \;\middle|\; \lim_{z \mapsto 0} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-2}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \simeq \mathbb{A}^0$$

$$\mathrm{Attr}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1 \;\middle|\; \lim_{z \mapsto 0} \begin{bmatrix} za \\ z^{-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \Rightarrow b \neq 0$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1 \;\middle|\; \lim_{z \mapsto 0} \begin{bmatrix} z^2 a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{A}^1$$

Per $G = SL_n$

$$\mathrm{Attr}\left(\dot\sigma B/B\right) = \left\{ (a_{ij})B \in G/B \;\middle|\; \lim_{z \mapsto 0} \underbrace{\chi(z).(a_{ij})B}_{} = \dot\sigma B/B \right\} = \left\{ gB/B \;\middle|\; \mathrm{Perm}(g) = \sigma \right\}$$

$$\left(\begin{aligned} a_{ij} &= 1 \quad i = \sigma(j) \\ &= 0 \quad i > \sigma(j) \\ &\qquad\; j > \sigma^{-1}(i) \end{aligned} \right)$$

$$\circledast \qquad \begin{pmatrix} z^{n-1}* & z^{n-1}* & & \\ z^{n-2}* & \vdots & & \\ \vdots & z^{n-\sigma(i)}\boxed{1} & 0 \text{———} & 0 \\ z^{n-\sigma(i)+1}* & 0 & & \\ z^{n-\sigma(1)}\boxed{1} & 0 \text{———} & & 0 \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} z^{\sigma(1)-1}* & z^{\sigma(i)-1}* & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ & z* & & \\ z* & \boxed{1} & 0 \text{———} & 0 \\ \boxed{1} & 0 \text{———} & & 0 \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} B$$

In generale, troviamo sempre un cocarattere generico $\chi : \mathbb{C}^\times \longrightarrow A$ tale che

$$\mathrm{Attr}\left(\dot w B/B\right) = B\dot w B/B$$

Camere e bacini di attrazione

Osserviamo che in $\circledast$ avremmo ottenuto gli stessi bacini attrattivi se avessimo considerato il cocarattere

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} z^{a_1} & & & \\ & z^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z^{a_n} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad a_1 > a_2 > \dots > a_n$$

Osserviamo inoltre che se almeno due degli a_i fossero uguali allora $\# \mathcal{Fl}_n^{\mathbb{C}^\times} = \infty$ (dove l'azione di $\mathbb{C}^\times$ è indotta dal cocarattere) e.g. $G = GL_2$ $\quad \mathcal{F}l_2 \simeq \mathbb{P}^1$ $\quad \chi : \mathbb{C}^\times \to A$

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Allora $\chi(z) . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} za \\ zb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbb{P}^1)^{\mathbb{C}^\times} = \mathbb{P}^1$

ovvero, χ non è generico.

Consideriamo il reticolo dei cocaratteri: sia $A \simeq (\mathbb{C}^\times)^r$, allora

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, (\mathbb{C}^\times)^r) \simeq \mathbb{Z}^r$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \{ z \longmapsto (z^{a_1}, \ldots, z^{a_r}) \mid a_i \in \mathbb{Z} \} \end{array} \longmapsto (a_1, \ldots, a_r)$$

$$\begin{array}{c} A \simeq (\mathbb{C}^\times)^r \\ \downarrow \end{array}$$

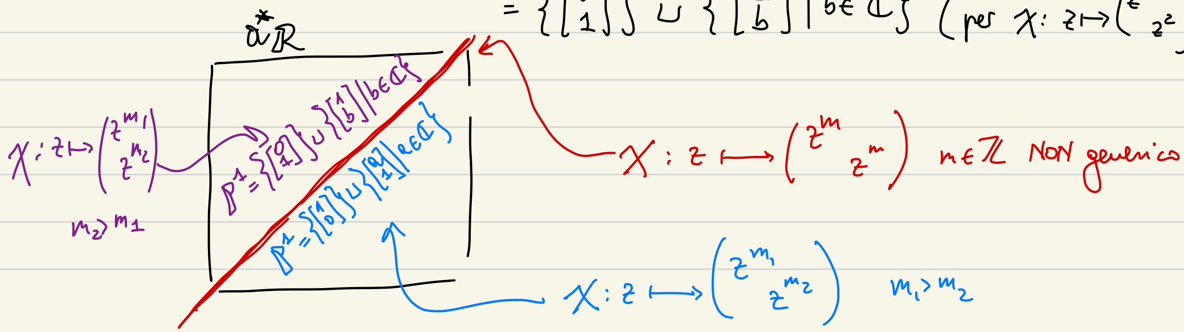
Estendendo gli scalari definiamo $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{R}} := \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$

e.g. $G = GL_n$ $\quad \chi : z \longmapsto \begin{pmatrix} z^n & & & \\ & z^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z \end{pmatrix}$

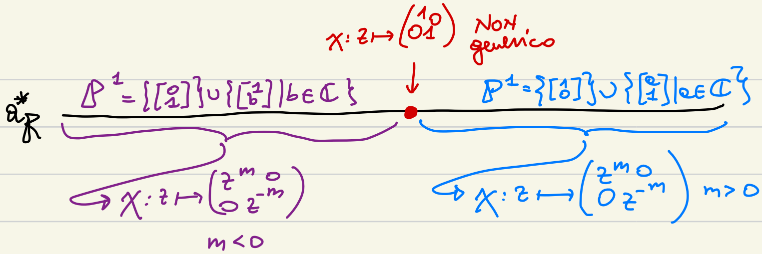
viene identificato con $(n, n-1, \ldots 1) \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$

e.g. $G = GL_2$ $\quad \mathbb{P}^1 = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \} \sqcup \{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \}$ (per $\chi : z \mapsto \begin{pmatrix} z^2 & \\ & z \end{pmatrix}$)

$$= \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \} \sqcup \{ \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{C} \} \quad (\text{per } \chi : z \mapsto \begin{pmatrix} z & \\ & z^2 \end{pmatrix})$$



e.g. $G = SL_2$



Camere, gruppo di Weyl e bacini attrattivi

In generale, W può essere realizzato come gruppo di riflessioni rispetto agli iperpiani che abbiamo trovato:

$$W \longleftrightarrow \text{camere} = \text{componenti connesse di } \mathfrak{a}^*_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi^+} \alpha^\perp$$

Per GL_n o SL_n, abbiamo visto che i caratteri non generici corrispondono a n-uple/$(n-1)$-uple t.c. $\exists\, i,j$ con $a_i = a_j$. Ma questi sono proprio vettori ortogonali a $(0 \dots 0, \underset{i}{1}, \dots, \underset{j}{-1}, 0 \dots 0)$ che corrisponde alla radice $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ di GL_n (o SL_n).

W agisce transitivamente sull'insieme delle camere:

Sia χ un cocarattere generico corrispondente a $\mathcal{C}$.
Poniamo

$$\chi^\sigma(z) := \dot\sigma \chi(z) \dot\sigma^{-1} \qquad (\sigma \in W,\ z \in \mathbb{C}^\times)$$

Osserviamo che χ^σ è ben definito poiché $\dot\sigma \in N_G(A)$ e dunque $\dot\sigma \chi(z) \dot\sigma^{-1} \in A$.

Denotiamo con $\mathrm{Attr}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\dot{w}B/B)$ il bacino attrattivo del punto fisso $\dot{w}B/B$ per l'azione di $\mathbb{C}^\times$ indotta da un qualunque χ corrispondente ad un punto della camera $\tilde{\mathcal{E}}$.

Andiamo a mostrare che $\mathrm{Attr}_{\mathcal{E}^\sigma}(\dot{w}B/B) = \sigma\left(\mathrm{Attr}_{\mathcal{E}}(\dot{\sigma}^{-1}\dot{w}B/B)\right)$

Sia $\chi' \in \mathcal{E}^\sigma$, allora $\exists\, \chi \in \mathcal{E}^\sigma$ t.c. $\chi' = \chi^\sigma$ e abbiamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Attr}_{\mathcal{E}^\sigma}(\dot{w}B/B) &= \left\{ gB/B \;\middle|\; \lim_{z\mapsto 0} \chi^\sigma(z)\, gB/B = \dot{w}B/B \right\} \\
&= \left\{ gB/B \;\middle|\; \lim_{z\mapsto 0} \dot{\sigma}\chi(z)\dot{\sigma}^{-1} gB/B = \dot{w}B/B \right\} \\
&= \left\{ \dot{\sigma} gB/B \;\middle|\; \lim_{z\mapsto 0} \dot{\sigma}\chi(z)\, gB/B = \dot{w}B/B \right\} \\
&= \left\{ \dot{\sigma} gB/B \;\middle|\; \dot{\sigma}\left(\lim_{z\mapsto 0} \chi(z)\, gB/B\right) = \dot{w}B/B \right\} \\
&= \left\{ \dot{\sigma} gB/B \;\middle|\; \lim_{\sigma\mapsto 0} \chi(z)\, gB/B = \dot{\sigma}^{-1}\dot{w}B/B \right\} \\
&= \sigma\left(\mathrm{Attr}_{\mathcal{E}}(\dot{\sigma}^{-1}\dot{w}B/B)\right)
\end{aligned}
$$