Coomologia equivariante (tramite tecniche di localizzazione)

$G = T$ (toro algebrico) $\qquad X$ una T-varietà (quasi proj)

$pt \hookrightarrow X \qquad H_T^*(X) \longrightarrow H_T^*(pt)$

omom. di anelli

$\Longrightarrow$ Struttura di $H_T^*(pt)$-modulo su $H_T^*(X)$.

Ricordiamo che $H_T^*(pt) \simeq Sym(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*)$, dove

$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^* = Hom(T, \mathbb{C}^\times) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$

<u>Thm</u> (Atiyah-Bott) $Q = Frac(H_T^*(pt))$

$$\rightsquigarrow \quad H_T^*(X) \otimes_{H_T^*(pt)} Q \underset{\substack{\uparrow \\ Q\text{-algebre}}}{\cong} H_T^*(X^T) \otimes Q$$

Moralmente, $H_T^*(X)$ è iso a $H_T^*(X^T)$ a meno di invertire un numero finito di caratteri.

Teorema di localizzazione à la Goresky-Kottwitz-MacPherson

Vogliamo di rendere più esplicita la formulazione classica nel caso in cui X e l'azione di T soddisfino ulteriori proprietà.
Questo sarà il caso di $\mathcal{F}$ dotata dell'azione di A:

Sia X proiettiva (e complessa) NON NECESSARIO che sia liscia

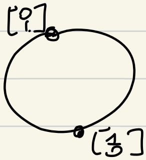
(X, T) si dice coppia GKM se

- $H^i(X) = 0 \quad \forall i \equiv 1 \pmod 2$
- $\# X^T < \infty$
- $\# \{T\text{-orbite 1-dimensionali}\} < \infty$

Sia $\mathcal{O}$ una orbita 1-dimensionale $\Rightarrow \mathcal{O} \overset{\psi}{\simeq} \mathbb{C}^\times$

$\Rightarrow$ T agisce su $\mathcal{O}$ tramite un carattere $\alpha_{\mathcal{O}} \in \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ (univocam. determinato da ψ).

e.g. $X = \mathbb{P}^1$ $\qquad A \curvearrowright \mathbb{P}^1$



$$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b \neq 0 \right\} \overset{\psi}{\simeq} \mathbb{C}^\times$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \longmapsto a/b$$

$$\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \longleftarrow\!\shortmid \; z$$

$$= A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Carattere si determina guardando l'azione indotta:

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} . z := \psi\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} . \psi^{-1}(z) \right)$$

$$= \psi\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \psi\left(\begin{bmatrix} tz \\ t^{-1} \end{bmatrix} \right) = t^2 z$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{O} : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto \alpha$$

Fatto Se (X,T) GKM $\Rightarrow \overline{O} = O \cup \{x\} \cup \{y\}$

Thm [Chang-Skjelbred, GKM] (X,T) GKM

$$H_T^*(X) \xhookrightarrow{\iota^*} H_T^*(X^T) = \bigoplus_{pt \in X^T} H_T^*(pt)$$

Più precisamente:

$$\boxed{\operatorname{Im}(\iota^*) = \left\{ (f_x) \in \bigoplus_{x \in X^T} H_T^*(x) \,\middle|\, f_x = f_y \mod \alpha_O \quad \forall\, \overline{O} = O \cup \{x\} \cup \{y\} \right\}}$$

e.g. $H_A^*(\mathbb{P}^1) \simeq \{ (f_{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}, f_{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}) \in \mathbb{C}[\alpha] \oplus \mathbb{C}[\alpha] \mid f_{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} \equiv f_{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} \mod \alpha \}$

$= \{ (f_{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}, f_{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} + \alpha g_{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}) \mid f_{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}, g_{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} \in \mathbb{C}[\alpha] \}$

$\mathbb{C}[\alpha]$ agisce diagonalmente su $H_T^*(\mathbb{P}^1)$

$\Rightarrow H_A^*(\mathbb{P}^1) \simeq (1,1)\mathbb{C}[\alpha] \oplus (0,\alpha)\mathbb{C}[\alpha]$

$\mathcal{F}l_n$: 1) orbite 1-dml tra due punti fissi $E_\bullet^\sigma, E_\bullet^\tau$

$\Longleftrightarrow \quad \tau = (i,j)\sigma$

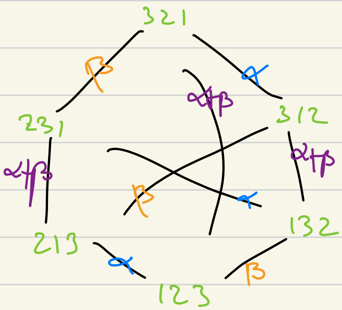
2) Queste sono tutte le orbite 1-dml.

$\mathcal{F}: \quad \mathcal{F}^A \longleftrightarrow W \qquad \{\text{1-dml } A\text{-orbits}\} \longleftrightarrow \{(w, s_\alpha w)\}$

$\rightsquigarrow H_A^*(\mathcal{F}) \underset{\substack{\uparrow \\ H_A^*(pt)\text{-algebre}}}{\cong} \{ (f_w) \in \bigoplus_{w\in W} R \mid f_w \equiv f_{s_\alpha w} \mod \alpha \quad \forall \alpha \in \Phi^+ \}$

$\underbrace{H_A^*(pt)}$
$\quad \shortparallel$
$\mathbb{C}[\alpha_i \mid \alpha \text{ semplice}] =: R$

Info su pti fissi e orbite possono essere registrate in un grafo:



$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} & f_{321} & & \text{e.g.} & 0 \\ f_{231} & & f_{312} & 0 & \alpha \\ f_{213} & & f_{132} & \alpha+\beta & \alpha \\ & f_{123} & & & \alpha+\beta \end{array}$$

Classi di Schubert equivarianti

Thm [Kostant-Kumar, Andersen-Jantzen-Soergel]

$\exists !$ base $\left(\xi^{(w)}\right)_{w \in W}$ di $H^*_A(\mathcal{F})$ (come $H^*_A(pt)$-modulo)

tale che:

1) $\xi^{(w)}_y = 0 \quad \forall\, y \not\leq w$ (Bruhat)

2) $$\xi^{(w)}_w = \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ w^{-1}\alpha \in \Phi^+}} \alpha \qquad \left(= \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ w\alpha \in \Phi^+}} w\alpha \right)$$

3) $\xi^{(w)}$ omogenea di grado codim $(C_w) = \deg \xi^{(w)}_w$

Esempio $\mathbb{P}^1$:
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & \qquad & 0 & & \alpha \\ \bullet & \text{---} & \bullet & & \bullet & \text{---} & \bullet \\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \\ & \shortparallel & & & & \shortparallel & \\ & \xi^{(s_1)} & & & & \xi^{(e)} & \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & & \alpha \\ \alpha+\beta & & \alpha \\ & \alpha+\beta & \end{array} = \xi^{(312)}$$

Un modo per dimostrarne l'esistenza è

1) Notare che $\xi^{(e)}$ è effettivamente ben definita

2) Applicare gli operatori di Demazure:

1) $\xi^{(e)}_y = 0 \quad \forall\, y \neq e$

$$\xi^{(e)}_e \equiv \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\xi^{(e)}_y} \text{ mod } \alpha \quad \forall\, y \text{ t.c. } y = s_\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \mid \xi^{(e)}_e \quad \forall \alpha \in \Phi^+ = \{\alpha \in \Phi^+ \mid e\cdot\alpha \in \Phi^+\}$$

Essendo le radici a due a due coprime, otteniamo che

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \;\Big|\; \xi_e^{(e)}$$

Questa condizione è necessaria e sufficiente affinché $\xi_e^{(e)} \in H_A^*(\mathcal{F})$ pertanto possiamo prenderla come nell'enunciato del thm.

2)
$$\begin{aligned} \partial_i : H_A^*(\mathcal{F}) &\longrightarrow H_A^*(\mathcal{F}) \\ (f_w) &\longmapsto (f'_w) \end{aligned}$$

$$\text{con } f'_w = \frac{f_{ws_i} - f_w}{w\alpha_i}$$

Algebricamente si verifica che è ben posto

Geometricamente si può ottenere come composizione di push forward e pullback:

$$G/B \xrightarrow{\pi_i} G/P_{\alpha_i} \qquad A\text{-equivariante}$$

$$\begin{tikzcd} \pi_i^* \circ \pi_{i*} : H_A^*(G/B) \arrow[r] \arrow[d, "\iota^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_A^*(G/B) \arrow[d, "\iota^*"] \\ \bigoplus H_A^*(x) \arrow[r, "\partial_i'"'] & \bigoplus H_A^*(x) \end{tikzcd}$$

Lemma Sia $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \Rightarrow \xi^{(w)} = \partial_{i_r} \circ \cdots \partial_{i_1}(\xi^{(e)})$

Relazione con Stab

$$H^*_A(X^A) \longrightarrow H^*_A(X)$$

$$\begin{array}{c} \wr\wr \\ \bigoplus_{w\in W} H^*_A(w) \\ \Psi \\ 1_w := (0, \dots, 1, 0 \dots 0) \end{array}$$

$$1_w \longmapsto \xi^{(w)}$$

Maulik-Okounkov: $\boxed{\mathrm{stab}_{\mathfrak{C}} : H^*_T(\tilde{\mathcal{N}}^A) \to H^*_T(\tilde{\mathcal{N}})}$

Thm [MO] Siano fissate $\mathfrak{C}$ camera, ε polarizzazione

$\exists!$ omom. di $H^*_T(pt)$-mods:

$$\mathrm{Stab}_{\mathfrak{C},\varepsilon} : H^*_T(X^A) \longrightarrow H^*_T(X)$$

t.c. $\forall\ Z \subset X^A$ comp. connessa $\forall\ \gamma \in H^*_{T/A}(Z)$

la classe $\Gamma = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{C},\varepsilon}(\gamma)$ soddisfa:

(i) $\mathrm{Supp}(\Gamma) \subset \mathrm{Attr}^f_{\mathfrak{C}}(Z)$

(ii) $\Gamma|_Z = \pm e(N_-(Z)) \cup \gamma$ (con segno determinato da ε)

(iii) $\deg_A(\Gamma|_{Z'}) < \frac{1}{2}\mathrm{codim}_{\mathbb{R}}(Z') \quad \forall\ Z' <_{\mathfrak{C}} Z$

Noi abbiamo $X^T = \{x_1, \dots, x_r\}$

Per ottenere $e^A(N_x)$, $e(N_{-,x})$:

$$Attr_\xi(x) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I^+} V_\alpha \qquad Rep_\xi(x) \simeq \bigoplus_{\beta \in I^-} U_\beta$$

$$I^+ = \{\alpha \in Hom(T, \mathbb{C}^\times) \mid V_\alpha \neq (0)\} \qquad I^- = \{\beta \in Hom(T, \mathbb{C}^\times \mid U_\beta \neq (0)\}$$

e.g. $\mathbb{P}^1$ $\qquad \chi : t \to \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$

$$\underset{\mathfrak{g}_\alpha}{\underset{\shortparallel}{}}$$

$$Attr_\xi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}0 & u\\0 & 0\end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathbb{C}\right\} \times \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \alpha - \hbar$$

$$Rep_\xi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\} \times \left\{\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C}\right\} \quad -\alpha$$

Fissata questa notazione, vale

$$e(N_-) = \prod_{\beta \in I^-} \beta$$

$$e^A(N) = \left(\prod_{\alpha \in I^+} \alpha \cdot \prod_{\beta \in I^-} \beta\right)\Big|_{\hbar = 0}$$

Per $T^*\mathcal{F}$: $\quad \mathrm{Attr}_{\mathcal{C}}((0,\dot w)) \underset{\substack{\uparrow \\ A\text{-mod}}}{\overset{\simeq}{\simeq}} \mathrm{Rep}_{\mathcal{C}}((0,\dot w))^*$

A-caratteri $\quad \alpha_1, \dots, \alpha_N \qquad -\alpha_1, \dots, -\alpha_N$

$$(-1)^N e^A(N) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \alpha^2 \rightsquigarrow \mathcal{E} = \text{scelta di segni } \forall \alpha$$

A volte c'è scelta che viene dalla geometria: $e(N)$

La volta scorsa avevo enunciato:

$$\mathrm{Attr}_{\mathcal{C}}((0,\dot w)) = \left\{ (x, gB/B) \,\middle|\, \underbrace{g\in B\dot w B}_{\alpha\in\Phi^+ \,|\, \dot w^{-1}\alpha\in\Phi^-} \quad x\in \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi^+ \\ w^{-1}\alpha\in\Phi^+}} \mathfrak{g}_\alpha \right\}$$

$$\mathrm{Rep}_{\mathcal{C}}((0,\dot w)) = \left\{ (x, gB/B) \,\middle|\, \underbrace{g\in B^-\dot w B}_{\alpha\in\Phi^+ \,|\, \dot w^{-1}\alpha\in\Phi^+} \quad x\in \bigoplus_{\substack{\alpha\in\Phi^- \\ w^{-1}\alpha\in\Phi^+}} \mathfrak{g}_\alpha \right\}$$

$$e(N_-) = \left(\prod_{\substack{\alpha\in\Phi^+ \\ w^{-1}\alpha\in\Phi^+}} \alpha\right)\left(\prod_{\substack{\alpha\in\Phi^- \\ w^{-1}\alpha\in\Phi^+}} \alpha-\hbar\right)$$

$$\prod_{\substack{w\alpha\in\Phi^+ \\ \alpha\in\Phi^+}} w\alpha \qquad \prod_{\substack{w\alpha\in\Phi^- \\ \alpha\in\Phi^+}} w\alpha-\hbar$$

Thm (S_n) $\mathcal{C}$ = prefenite $= \mathcal{C}^+$

$\exists!$ base $\{stab_+(w)\}$ di $H^*_T(\tilde{\mathcal{N}})$ t.c.

1. $stab_+(w)|_y = 0$ se $y \notin w$

2. $stab_+(w)|_w = \prod_{\substack{\alpha\in\Phi^+ \\ w\alpha\in\Phi^-}} (w\alpha - \hbar) \prod_{\substack{\alpha\in\Phi^+ \\ w\alpha\in\Phi^+}} w\alpha$

3. $\forall$ radice semplice α $\ell(ws_\alpha) = \ell(w)+1$

$$stab_+(ws_\alpha)|_y = -\frac{\hbar}{y\alpha} stab_+(w)|_y - \frac{y\alpha - \hbar}{y\alpha} stab_+(w)|_{ys_\alpha}$$

Dim (sketch)

- UNICITÀ: argomenti standard (usano limitazioni su grado e supporto)
- ESISTENZA: per <u>induzione</u>

$\boxed{\text{BASE}}$ si vede che $stab_+(e)$ definita come

$$stab_+(e)|_y = \begin{cases} 0 & y \neq e \\ \prod_{\beta\in\Phi^+} \beta & y = e \end{cases}$$

è in effetti ben definita

$\boxed{\text{PASSO INDUTTIVO}}$ prox volta!